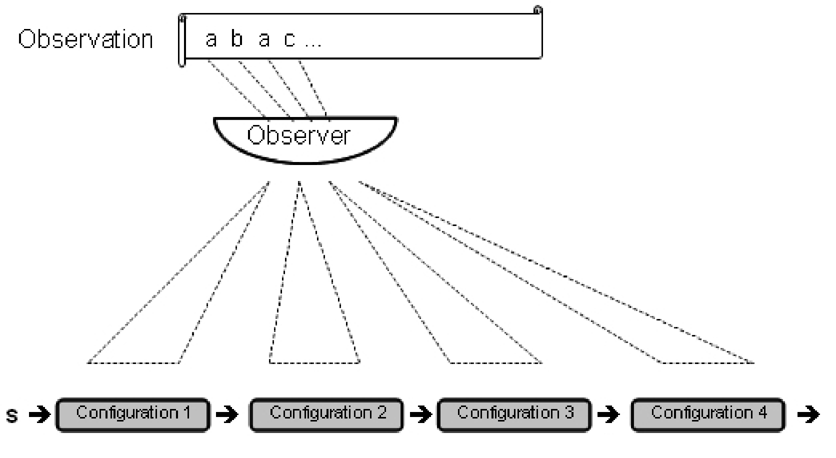
Biochemisch inspirierte Berechnungen

Beobachtersysteme II – Akzeptoren

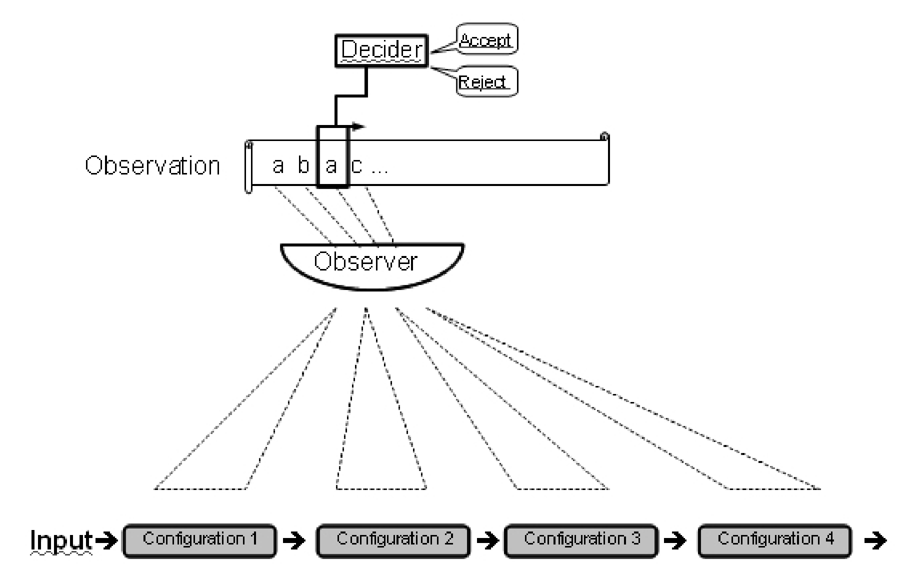
Peter Leupold

Vorlesung Wintersemester 2009/2010

Erzeugende Beobachtersysteme



Akzeptierende Beobachtersysteme



Akzeptierende Beobachtersysteme

Definition (Akzeptierende Beobachtersysteme)

Ein *akzeptierendes Beobachtersystem*, kurz A/O-System, ist ein Quadrupel $\Omega = [\Delta, R, \mathcal{O}, D]$, in dem $\mathcal{O}$ ein monadischer Transducer ist, R ein Textersetzungssystem über dem Eingabealphabet Σ von $\mathcal{O}$, das Eingabealphabet Δ eine Teilmenge von Σ, und der Entscheider D eine reguläre Sprache über dem Ausgabealphabet von $\mathcal{O}$.

Die von einem solchen System akzeptierte Sprache besteht aus allen Wörtern $w \in \Delta^*$ für die es eine Ableitungsfolge $s \in R(w)$ gibt, deren Beobachtung der Entscheider akzeptiert, d.h. $D(\mathcal{O}(s)) = \texttt{accept}$ wenn D als endlicher Automat gegeben ist; formal

$$L(\Omega) := \{w : \exists s[s \in R(w) \land D(\mathcal{O}(s)) = \texttt{accept}]\}.$$

Akzeptierende Beobachtersysteme

Für Klassen

- $\mathcal{C}$ von Textersetungssystemen,
- $\mathcal{A}$ von Beobachtern und
- $\mathcal{D}$ von Entscheidern

bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{D})$$

die Klasse von Sprachen, die von akzeptierenden Beobachtersystemen akzeptiert werden, deren Komponenten aus den entsprechenden Klassen stammen.

Akzeptierende Beobachtersysteme

Beispiel

Die nicht semilineare Sprache $\{a^{2^n} : n \geq 1\}$ wird akzeptiert durch das A/O-System $\Omega = (\Delta, R, \mathcal{O}, D)$ mit $\Delta = \{a\}$ und dem Textersetzungssystem R über dem Alphabet $\Sigma = \Delta \cup \{A, B\}$ das aus den invers kontextfreien Regeln $\{aa \to A, AA \to a, A \to B, a \to B\}$ besteht. Der Beobachter $\mathcal{O}$ ist durch folgende Abbildung definiert.

$$\mathcal{O}(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } w \in a^+A^+, \\ 2 & \text{if } w \in A^+a^+, \\ 3 & \text{if } w \in a^+, \\ 4 & \text{if } w \in A^+, \\ 5 & \text{if } w = B, \\ 6 & \text{else.} \end{cases}$$

Der Entscheider D akzeptiert die Sprache $3((1^*3) \cup (2^*4))^*5$.

Referenzsysteme: McNaughton-Sprachen

Idee: ein Textersetzungssytem akzeptiert diejenigen Wörter, die es mehr oder weniger restlos löschen kann.

Praktisch werden die Eingaben akzeptiert, die auf eine einfache Normalform reduzierbar sind.

Wenn diese Normalform nicht stets gleich ist, akzeptiert ein System also unter Umständen verschiedene Sprachen.

Definition (McNaughton-Sprachen)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem endlichen Textersetzungssystem R über dem Alphabet Γ, das Σ entält, als McNaughton-Sprache akzeptiert, wenn es Strings $t_1, t_2 \in (\Gamma \setminus \Sigma)^* \cap IRR(R)$ und ein $Y \in (\Gamma \setminus \Sigma) \cap IRR(R)$ gibt, so dass

$$w \in L \Leftrightarrow t_1 w t_2 \Rightarrow_R^* Y$$

Mit unterschiedlichen Y, t_1 und t_2 akzeptiert ein Textersetzungssystem im allgemeinen also verschiedene Sprachen.
Für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Textersetzungssystemen bezeichnet $\mathcal{C}$-$\texttt{McNL}$ die Klasse aller Sprachen, die McNaughton-Sprachen von Systemen aud $\mathcal{C}$ sind.

Paintersysteme

Paintersysteme bestehen nur aus Regeln der Form

$a \longrightarrow b$, das heisst ein Buchstabe wird umbenannt oder

$a \longrightarrow \lambda$, das heisst ein Buchstabe wird gelöscht.

Paintersysteme

Satz

Die McNaughton-Sprachen über einem Alphabet Σ, die von Painter-Systemen akzeptiert werden, lassen sich wie folgt charakterisieren:

1. *Eine Sprache gehört zu* $\mathtt{con-PA-McNL}$*, genau dann wenn sie als* $A^* \cdot B \cdot A^*$ *darstellbar ist, wobei* A *und* B *disjunkte Teilmengen von* Σ *sind.*
2. *Eine Sprache gehört zu* $\mathtt{PA-McNL}$*, genau dann wenn sie als* $A^* \cdot B \cdot A^*$ *darstellbar ist, wobei* A *und* B *beliebige Teilmengen von* Σ *sind.*

Korollar

$\mathtt{con-PA-McNL} \subsetneq \mathtt{PA-McNL} \subsetneq REG$

Paintersysteme

Satz

con-CF-$McNL$ = con-PA-$McNL$ und CF-$McNL$ = PA-$McNL$.

Satz

$InvCF$-$McNL$ = CFL.

Satz

$\mathit{Mon}\text{-}\mathit{McNL} = \mathit{CFL}$.

Das heisst, dass Textersetzungssyteme durch hinzufügen von invers kontextfreien aber nicht monadischen Regeln in Bezug auf McNaughton-Sprachen nicht mächtiger werden.

Trotz $\mathtt{Mon} \subsetneq \mathtt{InvCF}$ gilt also $\mathtt{Mon\text{-}McNL} = \mathtt{InvCF\text{-}McNL}$.

Invers kontextfreie aber nicht monadische Regeln sind solche, die die Wortlänge nicht verändern.

Akzeptierende Beobachtersysteme

Satz

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathcal{CF}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = RE.$

Satz

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathcal{CF}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = RE.$

$$\mathcal{O}(w) = \begin{cases} A & \text{if } w \in (\Phi \setminus \{\Box\})^*, \\ B & \text{if } w \in \vdash (\Phi \setminus \{\Box\})^*, \\ C & \text{if } w \in \vdash (\Phi \setminus \{\Box\})^* \dashv . \\ D_1 & \text{if } w \in \vdash \Box^*\Phi^* \dashv, \\ D_2 & \text{if } w \in \vdash \Box^*\Phi^*\Box^* \dashv . \end{cases}$$

Akzeptierende Beobachtersysteme

Satz

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathcal{CF}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = RE.$

$$\mathcal{O}(w) = \begin{cases} A & \text{if } w \in (\Phi \setminus \{\Box\})^*, \\ B & \text{if } w \in \vdash (\Phi \setminus \{\Box\})^*, \\ C & \text{if } w \in \vdash (\Phi \setminus \{\Box\})^* \dashv . \\ D_1 & \text{if } w \in \vdash \Box^* \Phi^* \dashv, \\ D_2 & \text{if } w \in \vdash \Box^* \Phi^* \Box^* \dashv . \end{cases}$$

$t : (q_1, x) \to (q_2, y, +)$:

$$\frac{x}{q_1} z \overset{(x,q_1)\to t}{\Rightarrow} tz \overset{z\to(z,q_2)}{\Rightarrow} t\frac{z}{q_2} \overset{t\to y}{\Rightarrow} y\frac{z}{q_2}$$

Akzeptierende Beobachtersysteme

Korollar

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathtt{PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathcal{CS}$.

LBAs können $\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathtt{PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA})$ simulieren, Beobachter und Entscheider im Speicher.

Andererseits lassen sich mit Painterregeln Turingmaschinentransitionen simulieren wie oben.

Korollar

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathit{con}\text{-}\mathit{PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathit{CS}.$

Im Gegensatz zur Situation bei McNaughton-Sprachen schwächt die Konfluenz hier also nicht die Berechnungskraft der Paintersysteme.

Akzeptierende Beobachtersysteme

Korollar

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathtt{con\text{-}PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathit{CS}.$

Im Gegensatz zur Situation bei McNaughton-Sprachen schwächt die Konfluenz hier also nicht die Berechnungskraft der Paintersysteme.

Gilt auch $\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathtt{con\text{-}CF}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathit{RE}$?

Korollar

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathit{InvCF}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\mathit{PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathit{CS}$$

Beispiel

Das System $R = \{(ca, c), (bd, d), (cabd, Y)\}$ mit den Strings $t_1 = c$ und $t_2 = d$ akzeptiert a^+b^+. Wir erweitern das Alphabet um $[ca]$ und $[bd]$.
Neue Regeln:
$R' = \{(a, [ca]), (b, [bd]), ([ca]a, [ca]), (b[bd], [bd]), ([ca][bd], Y)\}$

$$\mathcal{O}(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } w \in a^+b^+, \\ 2 & \text{if } w \in [ca]a^*b^+, \\ 3 & \text{if } w \in [ca]a^*b^*[bd], \\ 4 & \text{if } w = Y, \\ 5 & \text{else.} \end{cases}$$

Entscheider: 123^+4
Gesamt a^+b^+

Satz

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\textit{non-in}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\textit{PA}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA})$.

Und damit

Korollar

$\textit{non-in-McNL} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}}(\textit{non-in}, \mathcal{MT}, \mathcal{FA}) = \mathit{CS}$.

Klar ist `PA` $\subseteq$ `non-in`.
Verkürzende Regeln $r : ABC \rightarrow DE$ werden in der gewohnten Weise simuliert:

$$ABC \Rightarrow A_r BC \Rightarrow A_r B_r C \Rightarrow A_r B_r C_r \Rightarrow \Box B_r C_r \Rightarrow \Box D C_r \Rightarrow \Box DE.$$

Nächstes Thema

Nächstes Thema wird die

Beobachtung von Veränderungen.

Anstelle der gesamten Konfiguration sieht der Beobachter lediglich, was verändert wurde, ohne zu wissen wo.